

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»

**Физико-математический факультет**  
**Кафедра информатики и вычислительной математики**

УТВЕРЖДАЮ  
И. о. проректора по УР  
М. Х. Чанкаев  
«30» апреля 2025 г., протокол № 8

**Рабочая программа дисциплины**  
**Комбинаторный анализ**

---

*(наименование дисциплины (модуля)*

Направление подготовки

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика»**

---

*(шифр, название направления)*

Направленность (профиль):

**«Общий профиль: прикладная математика и информатика»**

---

Квалификация выпускника

***бакалавр***

---

Форма обучения

***очная***

---

Год начала подготовки - **2023**

Карачаевск, 2025

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент Шунгаров Х.Д.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018 № 9 с изменениями и дополнениями от 26.11.2020 г., №1456, 8.02.2021 г., №83, образовательной программой высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, направленность (профиль): «Общий профиль: прикладная математика и информатика»; локальными актами КЧГУ.

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры информатики и вычислительной математики на 2025–2026 учебный год, протокол **№ 8 от 25 апреля 2025г.**

## Оглавление

1. Наименование дисциплины (модуля).....	4
2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы .....	4
3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.....	4
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся.....	5
5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.....	6
5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах).....	6
6. Основные формы учебной работы и образовательные технологии, используемые при реализации образовательной программы.....	8
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю).....	10
7.1. Индикаторы оценивания сформированности компетенций .....	10
7.2. Перевод бально-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания.....	11
7.3. Типовые контрольные задания или иные учебно-методические материалы, необходимые для оценивания степени сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины .....	11
7.3.3. Примерные вопросы к итоговой аттестации (зачет) .....	11
7.3.2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания сформированности компетенций:.....	12
7.3.3. Оценочные материалы. Темы к докладам и рефератам. Варианты контрольных работ .....	12
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля).....	16
8.1. Основная литература: .....	16
8.2. Дополнительная литература: .....	16
9. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля) .....	17
9.1. Общесистемные требования .....	17
9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины.....	18
9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.....	18
9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы .....	18
10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья .....	18
11. Лист регистрации изменений .....	19

## 1. Наименование дисциплины (модуля)

Комбинаторный анализ.

**Целью** изучения дисциплины Б1.В.ДВ.05.02 «Комбинаторный анализ» является: формирование компетенций в соответствии с требованиями стандарта, изучение основных понятий дискретной математики, развитие комбинаторного мышления студентов, логической культуры, применений дискретной математики в будущей профессиональной деятельности.

**Для достижения цели ставятся задачи:**

- получить представление о терминологии дискретной математики;
- изучить необходимый теоретический материал дисциплины;
- изучить основные методы и алгоритмы решения задач;
- уметь конструировать вычислительный процесс, начиная с постановки задачи и заканчивая её решением;
- усвоить методы анализа полученных решений.

Цели и задачи дисциплины определены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Информатика и вычислительная техника (квалификация – бакалавр).

## 2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Комбинаторный анализ» (Б1.В.ДВ.05.02) относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Б1. Дисциплина (модуль) изучается на 3 курсе в 6 семестре.

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОП	
Индекс	Б1.В.ДВ.05.02
<b>Требования к предварительной подготовке обучающегося:</b>	
Изучение данной дисциплины базируется на следующих курсах: «Прикладная алгебра», «Математическая логика», «Дискретная математика».	
<b>Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:</b> «Теория вероятностей», «Математический анализ».	
Изучение дисциплины «Комбинаторный анализ» необходимо для успешного прохождения итоговой государственной аттестации.	

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины «Комбинаторный анализ» направлен на формирование следующих компетенций обучающегося:

Код компетенций	Содержание компетенции в соответствии с ФГОС ВО/ ОПВО	Индикаторы достижения компетенций
УК-1.	УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3. Владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографического поиска

ПК-2	Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<p>ПК-2.1. Знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы.</p> <p>ПК-2.2. Умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач.</p> <p>ПК-2.3. Владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач.</p>
------	--	--

**4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся**

Общая трудоемкость (объем) дисциплины (модуля) составляет 3 ЗЕТ, 108 академических часа.

Объём дисциплины	Всего часов	Всего часов
для очной формы обучения	для заочной формы обучения	
<b>Общая трудоемкость дисциплины</b>	108	
<b>Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий)* (всего)</b>	54	
<b>Аудиторная работа (всего):</b>	54	
в том числе:		
лекции	18	
семинары, практические занятия		
практикумы	Не предусмотрено	
лабораторные работы	36	
<b>Внеаудиторная работа:</b>		
консультация перед зачетом		
Внеаудиторная работа также включает индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, групповые, индивидуальные консультации и иные виды учебной деятельности, предусматривающие групповую или индивидуальную работу обучающихся с преподавателем), творческую работу (эссе), рефераты, контрольные работы и др.		
<b>Самостоятельная работа обучающихся (всего)</b>	54	
<b>Контроль самостоятельной работы</b>		
<b>Вид промежуточной аттестации обучающегося (зачет / экзамен)</b>	Зачёт	

**5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)**

Для очной формы обучения

№ п/п /семе- стр	Раздел, тема дисциплины	Общая трудоем- кость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость (в часах)		
			Всего	Аудиторные уч. занятия	
			108	Лек.	Лаб.
	<b>Раздел 1. Комбинаторные функции.</b>	<b>12</b>	<b>2</b>		<b>4</b>
1.	Тема: Комбинаторные функции./лк/	2	2		
2.	Тема: Задачи на элементарные комбинаторные функции./пр/	4			4
3.	Тема: Треугольник Паскаля. Бином Ньютона./ср/	6			6
	<b>Раздел 2. Сочетания с повторениями</b>	<b>12</b>	<b>2</b>		<b>4</b>
1.	Тема: Мультиномиальный коэффициент. Сочетания с повторениями. /лк/	2	2		
2.	Тема: Решение задач /пр/	4			4
3.	Тема: Полиномиальная формула/ср/	6			6
	<b>Раздел 3. Разложения. Числа Стирлинга первого рода.</b>	<b>12</b>	<b>2</b>		<b>4</b>
1.	Тема: Разложения. Числа Стирлинга. /лк/	8	2		6
2.	Тема: Числа Стирлинга первого рода. Числа Стирлинга второго рода. /пр/	4			4
	<b>Раздел 4. Комбинаторные соотношения и производящие функции для чисел Стирлинга второго рода.</b>	<b>12</b>	<b>2</b>		<b>4</b>
1.	Тема: Комбинаторные соотношения и производящие функции /ср/	6			6
2.	Тема: Числа Стирлинга	2	2		

	второго рода./лк/					
3.	Тема: Решение задач /np/	4			4	
<b>Раздел 5. Рекуррентные соотношения.</b>		<b>12</b>	<b>2</b>		<b>4</b>	<b>6</b>
1.	Тема: Рекуррентные соотношения. Числа Фибоначчи и Люка. / лк/	2	2			
2.	Числа Фибоначчи и Люка. /np/	4			4	
3.	Тема: <i>Решение задач/cp/</i>	6				6
<b>Раздел 6: Гауссовые многочлены.</b>		<b>12</b>	<b>2</b>		<b>4</b>	<b>6</b>
1.	Тема: Гауссовые многочлены и число подпространств в пространстве над конечным полем./лк/	2	2			
2.	Тема: Решение задач/лаб/	4			4	
3.	Тема: Треугольник Паскаля для Гауссовых многочленов./cp/	6				6
<b>Раздел 7. Два q-бинома Ньютона.</b>		<b>12</b>	<b>2</b>		<b>4</b>	<b>6</b>
1.	Тема: Принцип включения-исключения. Число беспорядков. /лк/	2	2			
2.	Тема: Принцип включения-исключения в терминах функций./cp/	6				6
3	Тема: Решение задач /лаб/	4			4	
<b>Раздел 8. Метод трансфер-матрицы для перечисления путей в ориентированном графе.</b>		<b>12</b>	<b>2</b>		<b>4</b>	<b>6</b>
1.	Тема: Перечисление слов в алфавите с конечным числом запретных подслов. /лк/	8	2			6
2.	Тема: Производящие функции. /np/	4			4	
<b>Раздел 9. Разбиения и их производящие функции.</b>		<b>12</b>	<b>2</b>		<b>4</b>	<b>6</b>
1.	Тема: Перечисление разбиений содержащихся в	8	2			6

	прямоугольнике/лк/					
2.	Тема: Перестановки с ограничением на расположение. Ладейные многочлены. /np/	4			4	
	<b>Всего</b>	<b>108</b>	<b>18</b>		<b>36</b>	<b>54</b>

## **6. Основные формы учебной работы и образовательные технологии, используемые при реализации образовательной программы**

**Лекционные занятия.** Лекция является основной формой учебной работы в вузе, она является наиболее важным средством теоретической подготовки обучающихся. На лекциях рекомендуется деятельность обучающегося в форме активного слушания, т.е. предполагается возможность задавать вопросы на уточнение понимания темы и рекомендуется конспектирование основных положений лекции. Основная дидактическая цель лекции - обеспечение ориентировочной основы для дальнейшего усвоения учебного материала. Лекторами активно используются: лекция-диалог, лекция - визуализация, лекция - презентация. Лекция - беседа, или «диалог с аудиторией», представляет собой непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. Ее преимущество состоит в том, что она позволяет привлекать внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории. Участие обучающихся в лекции – беседе обеспечивается вопросами к аудитории, которые могут быть как элементарными, так и проблемными.

Главной задачей каждой лекции является раскрытие сущности темы и анализ ее основных положений. Рекомендуется на первой лекции довести до внимания студентов структуру дисциплины и его разделы, а в дальнейшем указывать начало каждого раздела (модуля), суть и его задачи, а, закончив изложение, подводить итог по этому разделу, чтобы связать его со следующим. Содержание лекций определяется настоящей рабочей программой дисциплины. Для эффективного проведения лекционного занятия рекомендуется соблюдать последовательность ее основных этапов:

1. формулировку темы лекции;
2. указание основных изучаемых разделов или вопросов и предполагаемых затрат времени на их изложение;
3. изложение вводной части;
4. изложение основной части лекции;
5. краткие выводы по каждому из вопросов;
6. заключение;
7. рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам.

**Практические занятия.** Дисциплины, по которым планируются практические занятия, определяются учебными планами. Практические занятия относятся к основным видам учебных занятий и составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки. Выполнение студентом практических занятий направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин математического и общего естественно-научного, общепрофессионального и профессионального циклов;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива. Методические рекомендации разработаны с целью единого подхода к организации и проведению практических занятий.

Практическое занятие — это форма организации учебного процесса, направленная на выработку у студентов практических умений для изучения последующих дисциплин (модулей) и для решения профессиональных задач. Практическое занятие должно проводиться в учебных кабинетах или специально оборудованных помещениях. Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями. Дидактические цели практических занятий: формирование умений (аналитических, проектировочных, конструктивных), необходимых для изучения последующих дисциплин (модулей) и для будущей профессиональной деятельности.

В процессе подготовки к практическим занятиям, обучающимся необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме. Более глубокому раскрытию вопросов способствует знакомство с дополнительной литературой, рекомендованной преподавателем по каждой теме семинарского или практического занятия, что позволяет обучающимся проявить свою индивидуальность в рамках выступления на данных занятиях, выявить широкий спектр мнений по изучаемой проблеме.

**Образовательные технологии.** При проведении учебных занятий по дисциплине используются традиционные и инновационные, в том числе информационные образовательные технологии, включая при необходимости применение активных и интерактивных методов обучения.

Традиционные образовательные технологии реализуются, преимущественно, в процессе лекционных и практических занятий. Инновационные образовательные технологии используются в процессе аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов в виде применения активных и интерактивных методов обучения. Информационные образовательные технологии реализуются в процессе использования электронно-библиотечных систем, электронных образовательных ресурсов и элементов электронного обучения в электронной информационно-образовательной среде для активизации учебного процесса и самостоятельной работы студентов.

Практические занятия могут проводиться в форме групповой дискуссии, «мозговой атаки», разборка кейсов, решения практических задач, публичная презентация проекта и др. Прежде, чем дать группе информацию, важно подготовить участников, активизировать их ментальные процессы, включить их внимание, развивать кооперацию и сотрудничество при принятии решений.

**7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации  
обучающихся по дисциплине (модулю)**

**7.1. Индикаторы оценивания сформированности компетенций**

<b>Компетенции</b>	<b>Зачтено</b>	<b>Не зачтено</b>		
	Высокий уровень (отлично) (86-100% баллов)	Средний уровень (хорошо) (71-85% баллов)	Низкий уровень (удовлетворительно) (56-70% баллов)	Ниже порогового уровня (неудовлетворительно) (до 55% баллов)
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез  информации, применять системный подход для решения поставленны х задач	УК-1.1. Знает в полном объеме принципы сбора, отбора и обобщения информации	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	УК-1.1. Частично знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	УК-1.1. Не знает принципы сбора, отбора и обобщения информации
	УК-1.2. В полном объеме умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	УК-1.2. Частично умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	УК-1.2. Не умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности
	УК-1.3. В полном объеме владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографическог о поиска	УК-1.3. Владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографическог о поиска	УК-1.3. Фрагментарно владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографическог о поиска	УК-1.3. Не владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографическог о поиска
ПК-2 Способность понимать, совершенств овать и применять современный математическ ий аппарат	ПК-2.1. В полном объеме знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы	ПК-2.1. Знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы	ПК-2.1. Фрагментарно знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы	ПК-2.1. Не знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы
	ПК-2.2. В полном объеме умеет использовать и модифицировать существующие математические	ПК-2.2. Умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для	ПК-2.2. Частично умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для	ПК-2.2. Не умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для

	методы для решения прикладных задач	решения прикладных задач	решения прикладных задач	решения прикладных задач
	ПК-2.3. В полном объеме владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. Владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. Частично владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач.	ПК-2.3. Не владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач

## **7.2. Перевод бально-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания.**

Порядок функционирования внутренней системы оценки качества подготовки обучающихся и перевод бально-рейтинговых показателей обучающихся в отметки традиционной системы оценивания проводиться в соответствии с положением КЧГУ «Положение о бально-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся», размещенным на сайте Университета по адресу: <https://kchgu.ru/inye-lokalnye-akty/>

## **7.3. Типовые контрольные задания или иные учебно-методические материалы, необходимые для оценивания степени сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины**

### **7.3.3. Примерные вопросы к итоговой аттестации (зачет)**

1. Знакомство с теоретико-множественными операциями.
2. Построение произведения множеств.
3. Обратное отображение.
4. Перестановки на множестве.
5. Генерирование подмножеств.
6. Перестановки, размещения, сочетания.
7. Комбинации с повторениями.
8. Производящие функции.
9. Сложение, пересечение и композиция бинарных отношений.
10. Индуцированная функция.
11. Комбинаторные функции.
12. Задачи на элементарные комбинаторные.
13. Треугольник Паскаля.
14. Бином Ньютона..
15. Комбинаторные соотношения и производящие функции.
16. Рекуррентные соотношения. Числа Фибоначчи и Люка.
17. Тolerантность и покрытия.
18. Примеры частичных порядков. НОД и НОК.
19. Высказывания и операции над ними.
20. Основные эквивалентности (законы) алгебры высказываний.
21. Метод математической индукции.
22. Множества. Операции над множествами.
23. Способы задания множеств.

24. Классическая формула метода включений- исключений.
25. Отношения. Прямое произведение множеств.
26. Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты.
27. Основные тождества с биномиальными коэффициентами.
28. Полиномиальная формула. Полиномиальные коэффициенты.
29. Правило суммы.
30. Правило произведения.
31. Асимптотические методы решений рекуррентных соотношений.
32. Вычисление суммы бесконечной геометрической прогрессии.
33. Метод производящих функций. Числа Фибоначчи.
34. Метод включения и исключения. Теорема.
35. Треугольник Паскаля для Гауссовых многочленов.
36. Гауссова многочлены и число подпространств в пространстве над конечным полем.
37. Принцип включения-исключения. Число беспорядков..

**Критерии оценки устного ответа на вопросы по дисциплине  
«Комбинаторный анализ»:**

✓ 5 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.

✓ 4 - балла - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.

✓ 3 балла – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определенно и последовательно изложить ответ.

✓ 2 балла – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

**7.3.2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания  
сформированности компетенций:**

**7.3.3. Оценочные материалы. Темы к докладам и рефератам. Варианты  
контрольных работ**

**Темы к докладам**

1. Функции (отображения).
2. Инъекция, сюръекция и биекция.

3. Индуцированная функция.
4. Комбинаторные функции.
5. Задачи на элементарные комбинаторные.
6. Треугольник Паскаля.
7. Бином Ньютона..
8. Комбинаторные соотношения и производящие функции.
9. Рекуррентные соотношения. Числа Фибоначчи и Люка.

**Критерии оценки доклада, сообщения, реферата:**

Отметка «отлично» за письменную работу, реферат, сообщение ставится, если изложенный в докладе материал:

- отличается глубиной и содержательностью, соответствует заявленной теме;
- четко структурирован, с выделением основных моментов;
- доклад сделан кратко, четко, с выделением основных данных;
- на вопросы по теме доклада получены полные исчерпывающие ответы.

Отметка «хорошо» ставится, если изложенный в докладе материал:

- характеризуется достаточным содержательным уровнем, но отличается недостаточной структурированностью;
- доклад длинный, не вполне четкий;
- на вопросы по теме доклада получены полные исчерпывающие ответы только после наводящих вопросов, или не на все вопросы.

Отметка «удовлетворительно» ставится, если изложенный в докладе материал:

- недостаточно раскрыт, носит фрагментарный характер, слабо структурирован;
- докладчик слабо ориентируется в излагаемом материале;
- на вопросы по теме доклада не были получены ответы или они не были правильными.

Отметка «неудовлетворительно» ставится, если:

- доклад не сделан;
- докладчик не ориентируется в излагаемом материале;
- на вопросы по выполненной работе не были получены ответы или они не были правильными.

**Варианты контрольных работ**

**Контрольная работа №1**

1. Решить уравнения

$$\text{a) } \frac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 132, \text{ где } n \in N \wedge n \geq 10.$$

Ответ: Принимая во внимание условие задачи, получим, что  $x=-13$  не является решением, а  $x=10$  - решение заданного уравнения.

$$\text{b) } x^2 \cdot C_{x-1}^{x-4} = A_4^2 \cdot C_{x+1}^3 - x \cdot C_{x-1}^{x-4}.$$

Ответ:  $x=6$ .

$$\text{c) } \frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x} \quad (x \leq 4).$$

Ответ:  $x=2$ .

d)  $C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^y : C_{x+1}^{y-1} = 5 : 5 : 3$

Ответ: (6,3).

2. Вычислить следующие суммы

a)  $S_n = C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1}$ .

Ответ:  $(2^{n+1}-1)/(n+1)$ .

b)  $S_n = C_n^0 - C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + \dots + (-1)^n \cdot nC_n^n, n=2,3,\dots,$

3. Доказать, что при  $n > p$  верно равенство:

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-3}^{p-1} + \dots + C_{p+1}^{p-1} + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой:  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$  которая верна для любого  $k \in \{0,1,2,3,\dots,n\}$ .

Поэтому

$$C_n^p - C_{n-1}^{p-1} = C_{n-1}^p$$

$$C_{n-1}^p - C_{n-2}^{p-1} = C_{n-2}^p$$

.....

$$C_{p+1}^p - C_p^{p-1} = C_p^p$$

$$C_p^p - C_{p-1}^{p-1} = 0$$

Складывая теперь левые и правые части полученных равенств, получим, что верно заданное равенство.

Контрольная работа №2

Доказать следующие свойства биномиальных коэффициентов:

a)  $C_n^k = C_n^{n-k}, k=1,2,\dots,n;$

b)  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, k=1,2,\dots,n;$

c)  $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m;$

d)  $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n;$

e)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0;$

k)  $\sum_{k=0}^n C_n^{2k} = \sum_{k=0}^n C_n^{2k+1}.$

### Контрольная работа №3

1. Найти экспоненциальную производящую функцию  $F(x)$  последовательности  $f(n)$  через функцию последовательности  $f(n)$ , если:  
 $f(n) = f(n+1) - f(n), n = 0, 1, 2, \dots$

Ответ:  $((1-x)f'(x) - f(0))/x$ .

2. Найти производящие функции следующих последовательностей:

a)  $f(n) = \begin{cases} n+1, & n=0,1,2,\dots,N, \\ 0, & n \geq N+1. \end{cases}$

Решение:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{n=0}^{N+1} x^n \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1-x^{N+2}}{1-x} \right) \text{ при } |x| < 1.$$

b)  $f(n) = n^2, n = 0, 1, 2, \dots,$

Решение:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) + x \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \\ &= x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{1-x} \right) + x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}, \text{ при } |x| < 1. \end{aligned}$$

**Шкала оценивания (за правильный ответ дается 1 балл)**

«неудовлетворительно» – 50% и менее

«удовлетворительно» – 51-80%

«хорошо» – 81-90%

«отлично» – 91-100%

**Критерии оценки тестового материала по дисциплине**

### **«Комбинаторный анализ»:**

- ✓ 5 баллов - выставляется студенту, если выполнены все задания варианта, продемонстрировано знание фактического материала (базовых понятий, алгоритма, факта).
- ✓ 4 балла - работа выполнена вполне квалифицированно в необходимом объеме; имеются незначительные методические недочёты и дидактические ошибки. Продемонстрировано умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определенного раздела дисциплины; понятен творческий уровень и аргументация собственной точки зрения
- ✓ 3 балла – продемонстрировано умение синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей в рамках определенного раздела дисциплины;
- ✓ 2 балла - работа выполнена на неудовлетворительном уровне; не в полном объеме, требует доработки и исправлений, и исправлений более чем половины объема.

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

### **8.1. Основная литература:**

1. Соболева, Т. С. Дискретная математика. Углубленный курс : учебник / под редакцией А. В. Чечкина. - Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2020. - 278 с. - ISBN 978-5-906818-11-9. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1015049> – Режим доступа: по подписке. - Текст: электронный.
2. Ренин, С. В. Дискретная математика : конспект лекций / С. В. Ренин. - Новосибирск: НГТУ, 2011. - 64 с. - ISBN 978-5-7782-1596-2. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/558822> – Режим доступа: по подписке. - Текст: электронный.
3. Корчагина, Е. В. Дискретная математика : практикум / Е. В. Корчагина, Р. В. Кузьменко, Н. А. Андреева. - Воронеж : Воронежский институт ФСИН России, 2019. - 162 с. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1086247> – Режим доступа: по подписке. - Текст: электронный.
6. Осипова, В. А. Основы дискретной математики : учебное пособие / В. А. Осипова. - 2-е изд., доп. - Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2020. - 157 с. - ISBN 978-5-00091-404-5. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1088379>. – Режим доступа: по подписке. - Текст: электронный.

### **8.2. Дополнительная литература:**

1. Редькин, Н. П. Дискретная математика: учебник / Н.П. Редькин. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 264 с. ISBN 978-5-9221-1093-8, 700 экз. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/208908> – Режим доступа: по подписке. - Текст: электронный.
2. Носов, В. В. Дискретная математика: учебное пособие / В. В. Носов; Оренбургский государственный университет. - Оренбург: ОГУ, 2019. - 144 с. - ISBN 978-5-7410-2304-4. URL: <https://e.lanbook.com/book/159904> - Режим доступа: для автороз. пользователей. - Текст: электронный.

## **9. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля)**

### ***9.1. Общесистемные требования***

#### **Электронная информационно-образовательная среда ФГБОУ ВО «КЧГУ»**

Каждый обучающийся в течение всего периода обучения обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронной информационно-образовательной среде (ЭИОС) Университета из любой точки, в которой имеется доступ к информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», как на территории Университета, так и вне ее.

Функционирование ЭИОС обеспечивается соответствующими средствами информационно-коммуникационных технологий и квалификацией работников, ее использующих и поддерживающих. Функционирование ЭИОС соответствует законодательству Российской Федерации.

Адрес официального сайта университета: <http://kchgu.ru>.

Адрес размещения ЭИОС ФГБОУ ВО «КЧГУ»: <https://do.kchgu.ru>.

#### **Электронно-библиотечные системы (электронные библиотеки)**

<b>Учебный год</b>	<b>Наименование документа с указанием реквизитов</b>	<b>Срок действия документа</b>
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система ООО «Знаниум». Договор № 249 эбс от 14.05.2025 г. Электронный адрес: <a href="https://znanium.com">https://znanium.com</a>	от 14.05.2025г. до 14.05.2026г.
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система «Лань». Договор № 10 от 11.02.2025 г. Электронный адрес: <a href="https://e.lanbook.com">https://e.lanbook.com</a>	от 11.02.2025г. до 11.02.2026г.
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система КЧГУ. Положение об ЭБ утверждено Ученым советом от 30.09.2015г. Протокол № 1. Электронный адрес: <a href="http://lib.kchgu.ru">http://lib.kchgu.ru</a>	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Национальная электронная библиотека (НЭБ). Договор №101/НЭБ/1391-п от 22.02.2023 г. Электронный адрес: <a href="http://rusneb.ru">http://rusneb.ru</a>	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Научная электронная библиотека «ELIBRARY.RU». Лицензионное соглашение №15646 от 21.10.2016 г. Электронный адрес: <a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a>	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Электронный ресурс Polpred.comОбзор СМИ. Соглашение. Бесплатно. Электронный адрес: <a href="http://polpred.com">http://polpred.com</a>	Бессрочный

## **9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины**

Занятия проводятся в учебных аудиториях, предназначенных для проведения занятий лекционного и практического типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в соответствии с расписанием занятий по образовательной программе. С описанием оснащенности аудиторий можно ознакомиться на сайте университета, в разделе материально-технического обеспечения и оснащенности образовательного процесса по адресу: <https://kchgu.ru/sveden/objects/>

## **9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения**

- Microsoft Windows (Лицензия № 60290784), бессрочная
  - Microsoft Office (Лицензия № 60127446), бессрочная
  - ABBY FineReader (лицензия № FCRP-1100-1002-3937), бессрочная
  - CalculateLinux (внесён в ЕРРП Приказом Минкомсвязи №665 от 30.11.2018-2020), бессрочная
  - Google G Suite for Education (IC: 0111p5u8), бессрочная
  - Kaspersky Endpoint Security (Лицензия № 280E-210210-093403-420-2061), с 25.01.2023 г. по 03.03.2025 г.
  - Kaspersky Endpoint Security. Договор №0379400000325000001/1 от 28.02.2025г.
- Срок действия лицензии с 27.02.2025г. по 07.03.2027г.

## **9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

1. Федеральный портал «Российское образование» - <https://edu.ru/documents/>
2. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – <http://school-collection.edu.ru/>
3. Базы данных Scopus издательства Elsevier <http://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic>.
4. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования - <http://fgosvo.ru>.
5. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) – <http://edu.ru>.
6. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – <http://school-collection.edu.ru>.
7. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (ИС «Единое окно») – <http://window.edu.ru>.

## **10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья**

В ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева» созданы условия для получения высшего образования по образовательным программам обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ).

Специальные условия для получения образования по ОПВО обучающимися с ограниченными возможностями здоровья определены «[Положением об обучении лиц с ОВЗ в КЧГУ](#)», размещенным на сайте Университета по адресу: <http://kchgu.ru>.

## 11. Лист регистрации изменений

<b>Изменение</b>	<b>Дата и номер протокола ученого совета факультета/ института, на котором были рассмотрены вопросы о необходимости внесения изменений в ОП</b>	<b>Дата и номер протокола ученого совета Университета, на котором были утверждены изменения в ОП</b>
<p>Переутверждена ОП ВО. Обновлены: учебный план, календарный учебный план, РПД, РПП, программы ГИА, воспитания календарный план воспитательной работы. Обновлены договоры:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>На антивирус Касперского. (Договор №56/2023 от 25 января 2023г.). Действует до 03.03.2025г.</li> <li>Договор №915 ЭБС ООО «Знаниум» от 12.05.2023г. Действует до 15.05.2024г.</li> <li>Договор №36 от 14.03.2024г.эбс «Лань». Действует по 19.01.2025г.</li> <li>Договор №238 ЭБС ООО «Знаниум» от 23.04.2024г. Действует до 11 мая 2025г.</li> </ol>	23.05.2024г. протокол №10	29.05.2024г. протокол №8
<p>Переутверждена ОПВО. Обновлены: учебный план, календарный учебный график, РПД, РПП, программы ГИА, воспитания, календарный план воспитательной работы. Обновлены договоры:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>На антивирус Касперского. (Договор №56/2023 от 25 января 2023г.). Действует до 03.03.2025г.</li> <li>На антивирус Касперского. (Договор № 0379400000325000001/1 от 28.02.2025г. Действует по 07.03.2027г.</li> <li>Договор № 10 от 11.02.2025г. эбс «Лань». Действует по 11.02.2026г.</li> <li>Договор № 238 эбс ООО «Знаниум» от 23.04.2024г. Действует до 11 мая 2025г. Договор № 249-эбс ООО «Знаниум» от 14.05.2025г. Действует до 14.05.2026г.</li> </ol>	29.04.2025г., протокол № 8	30.04.2025г., протокол № 8